Trois petites géométries de ronds

pour faire des ronds

Nous définissons ici trois petites géométries comme des systàmes formels, c'est à dire au moyen d'un double système génératif.

I. **Géométrie rudimentaire** $\mathcal{V}$

Définir une géométrie c'est d'abord définir la multiplicité des figures élémentaires **V** de cette géométrie.

D'autre part nous formulons les axiomes qui définissent les dérivations par déformations successives qui sont acceptées dans cette géométrie. Ces dérivations assurent l'identité des objets. Alors la géométrie peut commentcer.

0. $\mathcal{V}$**-Figures**

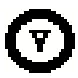
La multiplicité des figures présentent toutes les configurations de ronds définies à partir d'une figure primitive et de deux clauses formatives.

0.1. **La figure primitive**

($\mathcal{V}$-fp. 0) L'espace vide d'une portion de plan dénué du moindre trait est une figure **V** de cette géométrie.

0.2. **Les clauses formatifs**

($\mathcal{V}$-cf. 1) Si **V** est une figure de cette géométrie alors **V** entourée d'un rond est une figure **V'** de cette géométrie.



($\mathcal{V}$-cf. 2) Si **V** et **V'** sont deux figures de cette géométrie alors l'une disposées à côté de l'autre est une figure **V"** de cette géométrie.

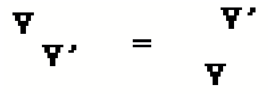
V V'

1. $\mathcal{V}$**-Calculs** (axiomes)

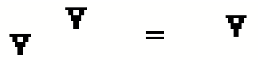
En second lieu nous disposons de trois axiomes géométriques pour cette géométrie des plus simples.

1.1. **Les axiomes géométriques**

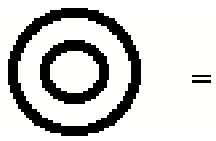
($\mathcal{V}$-ag. 1) Deux figures V et V' peuvent se déplacer dans la même zone du plan sans jamais se rencontrer, se croiser, ni traverser la ligne d'un rond



($\mathcal{V}$-ag. 2) Deux figures identiques **V** et **V'= V** coexistantes dans la même zone du plan se réduisent à un exemplaire unique de cette figure V



($\mathcal{V}$-ag. 3) Deux ronds concentriques entourant un vide sont identiques à la figure primitives dite de l'espace vide, c'est dire que deux ronds cocentriques autour d'une zone vide s'effacent.

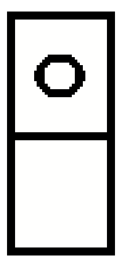


Notre géométrie $\mathcal{V}$ est définie

a'. **conséquences dans cette géométrie**

Il s'agit alors principalement de démontrer que toutes les figures **V** de cette géométrie définies en (0. **$\mathcal{V}$-Figures**) se réduisent soit à un rond seul soit s'effacent purement et simplement. Ceci donne lieu à un théorème.

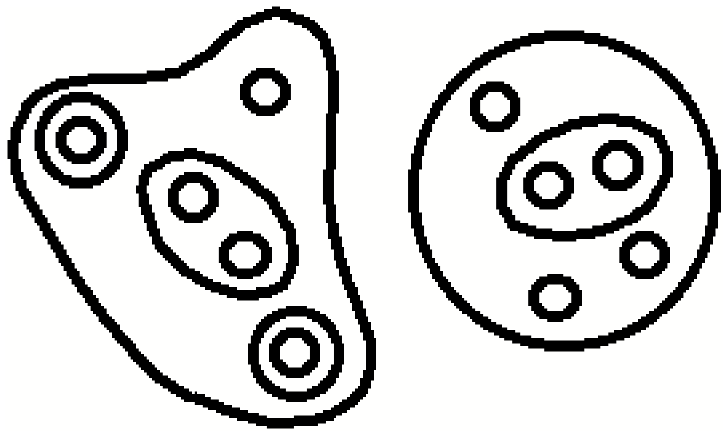
$\mathcal{V}$-Théorème principal : Il n'y a que deux objets dans $\mathcal{V}$. autrement dit : Toute figure se réduit soit à un rond, soit à la page blanche.



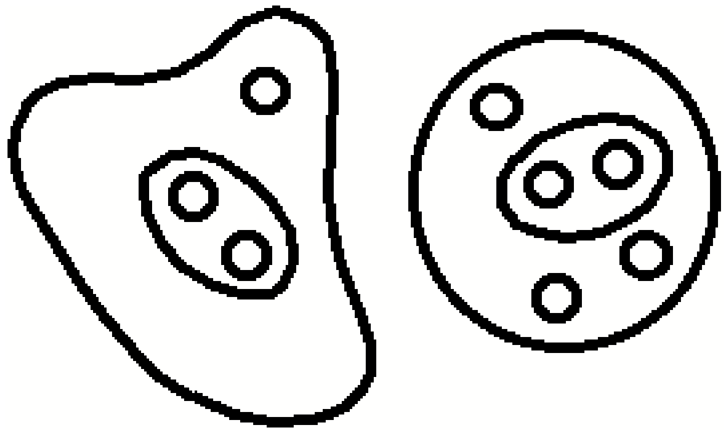
Nous le démontrerons plus loin.

Premier exercice

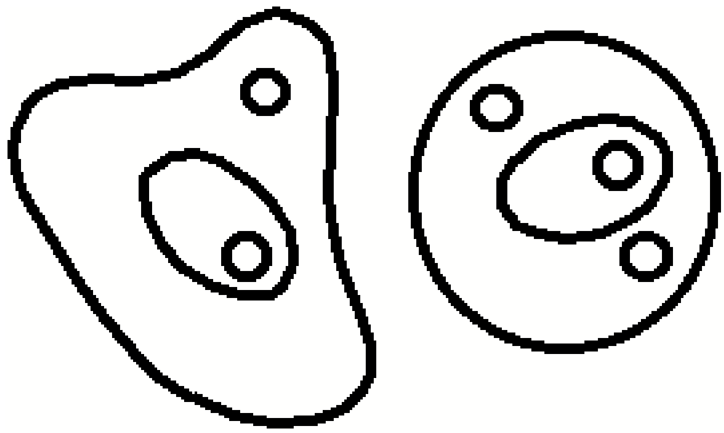
Donnons un exemple d'une figure de cette géométrie, puis montrons sa réduction par le calcul en un objet de cette théorie.



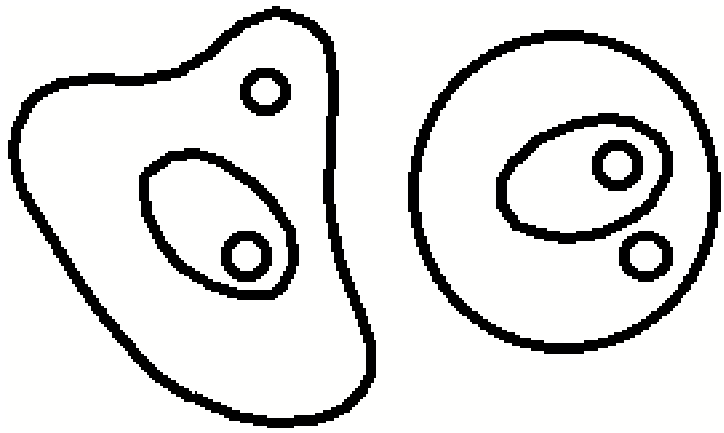
Nous utilisons d'abord l'axiome géométrique 3 qui consiste à effacer les doubles ronds cocentriques.



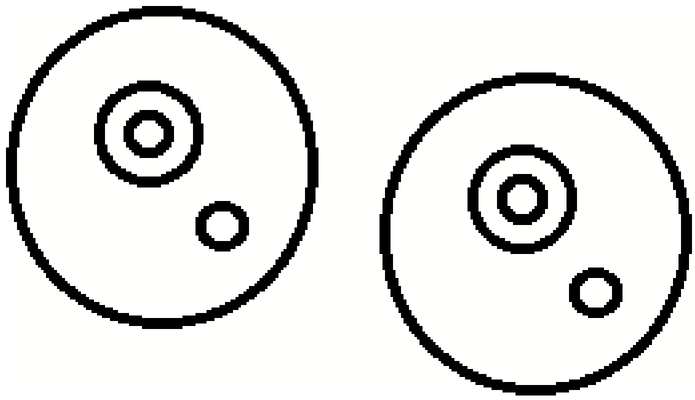
Puis nous utilisons l'axiome géométrique 2 qui consiste à remplacer les figures identique en double dans une même zone du plan par un seul exemplaire de cette figure.



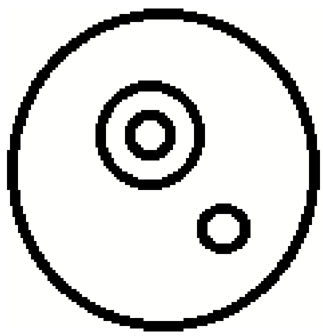
Nous pouvons employer ce même axiome encore un fois dans la partie droite de cette figure qui est faite de deux figures.



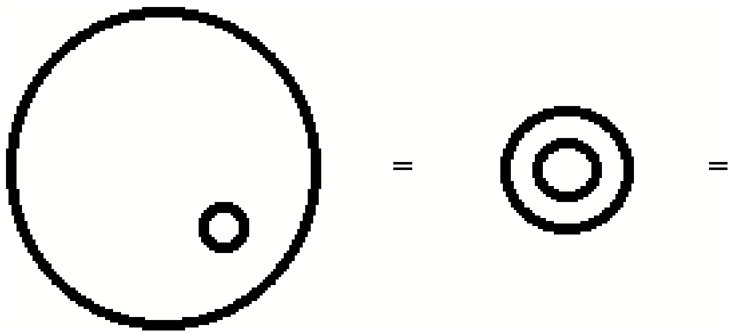
Nous constatons qu’en vertue de la déformation continue des ronds et de l’axiome géométrique 1 les deux figures qui composent notre exercice sont déformables en la même figure.



Dans ce cas les deux figures qui composent notre figure peuvent être réduites à un unique exemplaire identique à chacune d’elles en vertu de l’axiome 2..



Un nouvel emploie de l’axiome 3 nous donne une figure réductible par ce même axiome à un figure vide de trait, c’est dire qu’elle peut être effacée.

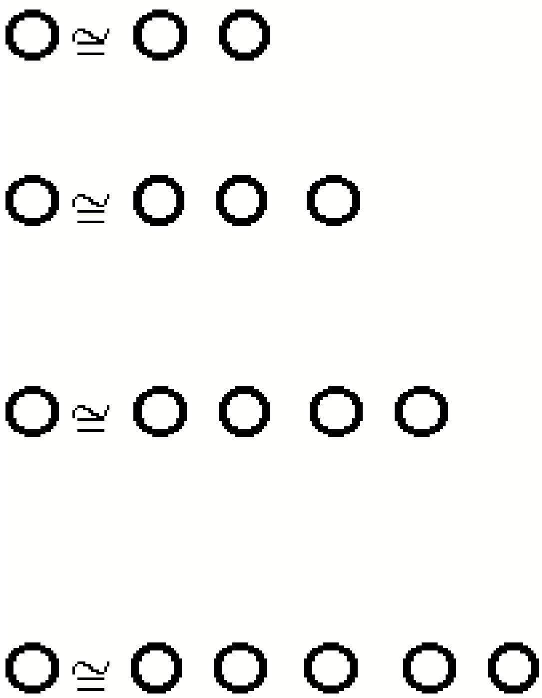


Ce premier exercice est terminé, il ne prouve rien mais permet au lecteur d’apprécier le type d’écriture ou de dessins mis en jeu par ce systéme formel.

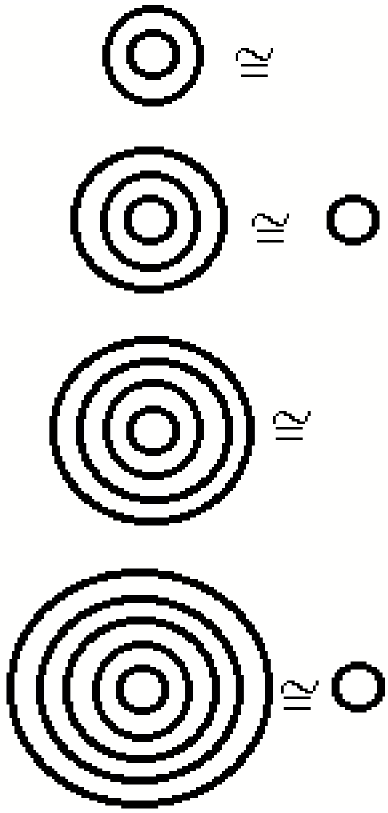
Seconde constatation

Avant de démontrer le théoréme principal donnons une liste de figures simples dont les égalités qui lient certaines d'entre elles sont les conséquence des axiomes de notre théorie géométrique.

Axiome 2



Axiome 3



Nous pouvons constater une disymétrie entre les alignements côte à côte de figures ou de ronds et les emboîtements succéssifs. dans le premier cas en vertu de l'axiome 2, n'importe quel alignement de ronds se réduit à un seul rond. dans le second cas les emboîtement de ronds présentent une alternance qui respecte la parité du nombre de ronds en vertu de l'axiome 3 pour donner soit un rond soit une page blanche.

.

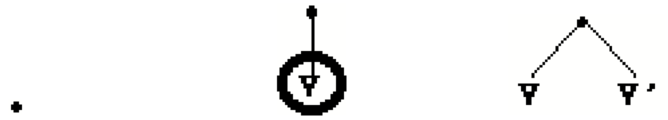
Pas plus que le premier exercice, ceci ne vaut pas encore pour une démonstration du théoréme.

Pour le démontrer nous devons donner quelques définitions supplémentaires.

L'arbre et la hauteur d'une figure

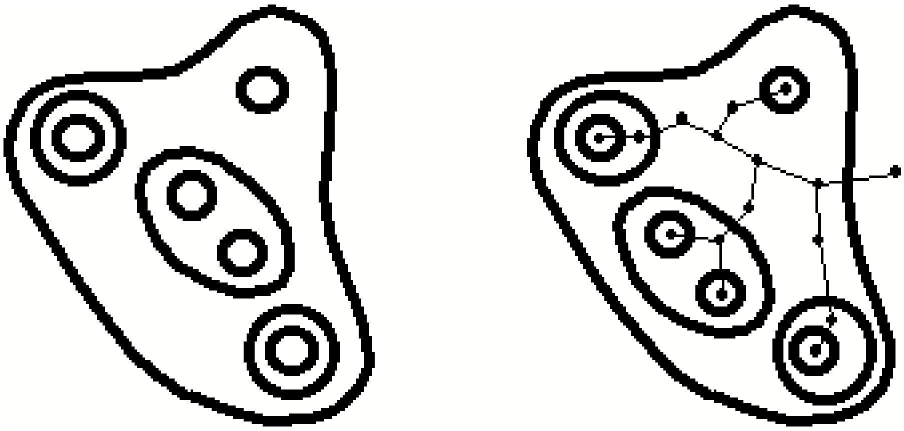
en fonction de la figure primitive et des clauses formatives, nous pouvons nous assurer par le raisonement qu'à chaque figure correspond un arbre syntaxique et qu'il est unique.

Pour établir cela il suffit d'associer à chacune de nos trois données **($\mathcal{V}$-fp.0)**, **($\mathcal{V}$-cf.1)** et **($\mathcal{V}$-cf.**2**)** un mode de construction d'une portion d'arbre.

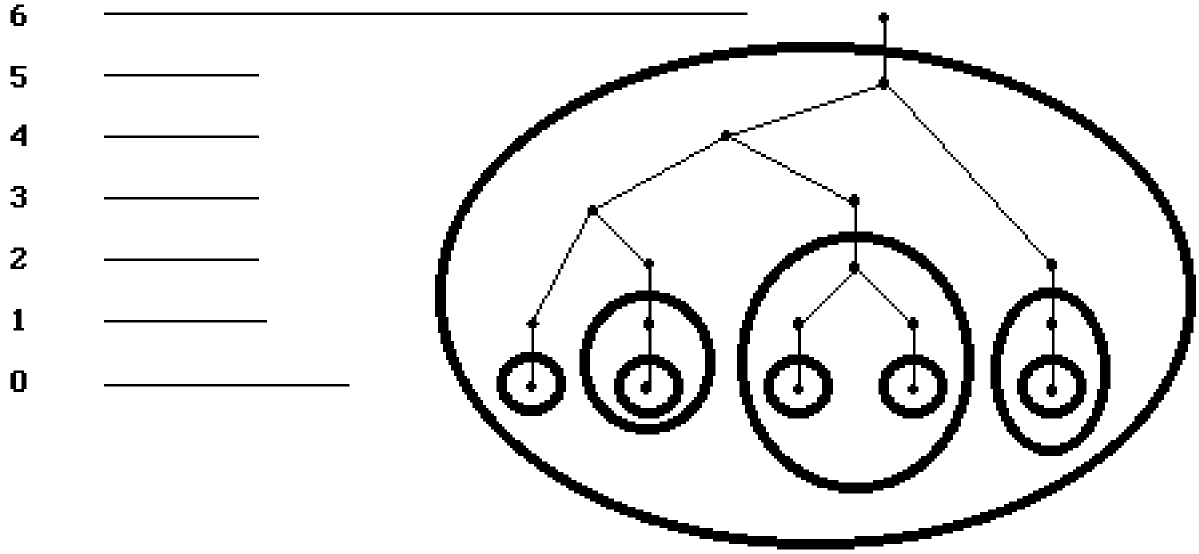


($\mathcal{V}$-fp.0), **($\mathcal{V}$-cf.**1**)** **($\mathcal{V}$-cf.**2**)**

Ceci permet de construire un arbre comme par exemple celui-ci pour une figure donnée.



Nous le construisons en employant à chaque étape une clause formative à partir d'une série de caractéres orimitifs qui constituent l'a hauteur zéro.



Nous pouvons dire que cette figure à la hauteur six. Nous remarquons aussi qu'un point, sommet, de l'arbre, de hauteur n est ainsi déterminé du fait que les sommets qui sont en dessous de lui ont une hauteur inférieurr ou égale à n-1.

Définition : La hauteur d'une figure est donnée par la hauteur du point qui marque la zone extérieure de son arbre syntaxique.

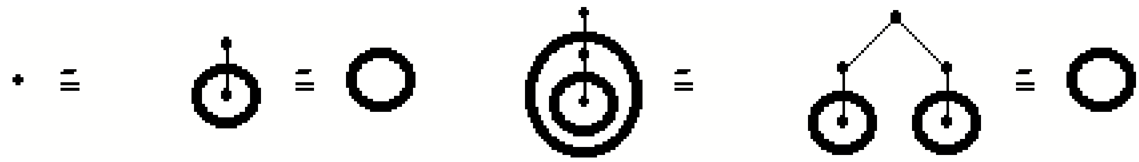
Théoréme : La hauteur n d'une figure est toujours au moins suppérieur d'une unité à la hauteur des figures qui la composent, celles-ci sont d'une hauteur i≤n-1.

Fort de cette définition et de ce théoréme, nous pouvons envisager de donner la démonstration du théorème.

Démonstration du $\mathcal{V}$-Théorème principal

Nous allons le démontrer par récurence sur la hauteur des figures.

1.- premières figures de hauteurs 0, 1 et 2,



1.0. 1.1. 1.2.1. 1.2.2.

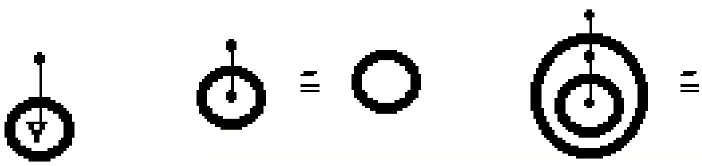
Produites par leur graphe selon le caractère primitif et les clauses formatives, elles sont bien réductibles dans tous les cas au vide ou au rond simple d'aprés les axiomes.

Le théoréme est démontré pour les hauteurs 0,1 et 2.

2.- Considérons maintenat que le théorémes est vrai pour les figures jusqu'à la hauteur n-1. Alors à la hauteur n.

Deux cas peuvent se présenter à cette hauteur.

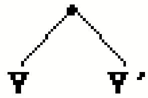
2;1.- La figure V' vient par la première clause formative d'une figure V de hauteur n-1,



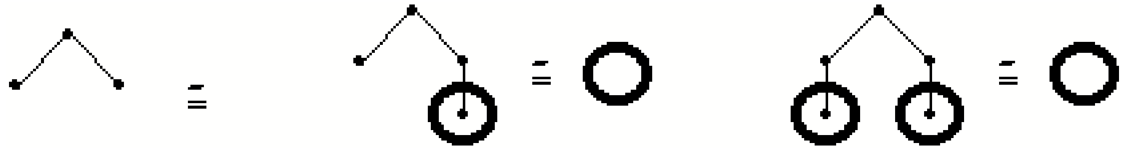
V = V = o

cette figure V peut être d'aprés l'hypothèse de recurence, soit un vide auquel cas V' est un rond, soit un rond auquel cas V' est un vide.

2.2.- La figure V" vient par la seconde clause formative de deux figures V et V' de hauteur inférieur ou égale à n-1



ces figures V et V' peuvent être d'aprés l'hypothése de récurence, soit toutes les deux un vide, soit l'une un vide l'autre un rond, soit toutes les deux un rond,



V = et V'= , V = et V' = O, V = o et V' = o.

auquels cas la figure V" est un vide ou dans les deux suivants un rond.

Notre 𝒱-théoréme est démontré

Et nous arrétons ici notre investigation dans cette géométrie, laissant au lecteur le soin d'imaginer d'autres questions à explorer ou d'autres théorémes à démontrer.

Passons à une nouvelle géométrie construite de la même manière comme un double systéme génératif et présentant une légére augmentation avec un caractére primitif supplémentaire.

Première géométrie augmentée 𝒫

Pour définir cette géométrie nous procédons comme dans le cas précédent. Il nous faut d'abord définir la multiplicité des figures élémentaires, notées P, de cette géométrie.

D'autre part nous formulons les axiomes qui définissent les dérivations par déformations tolérées dans cette géométrie.

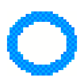
0. 𝒫-Figures

La multiplicité des figures présentent toutes les configurations de ronds définies à partir de deux figures primitives et de deux clauses formatives.

0.1. Les figures primitives

(𝒫-fp. 0) L'espace vide d'une portion de plan dénué du moindre trait est une figure P de cette géométrie.

(𝒫-fp. 1) Un rond bleu est une figure P de cette géométrie.



0.2. **Les clauses formatifs**

($\mathcal{P}$-cf. 1) Si **P** est une figure de cette géométrie alors **P** entourée d'un rond est une figure **P'** de cette géométrie.

P

($\mathcal{P}$-cf. 2) Si **P** et **P'** sont deux figures de cette géométrie alors l'une disposées à côté de l'autre est une figure **P"** de cette géométrie.

P **P'**

1. $\mathcal{P}$-**Calculs** (axiomes)

En second lieu nous disposons de trois axiomes géométriques pour cette géométrie des plus simples.

1.1. **Les axiomes géométriques**

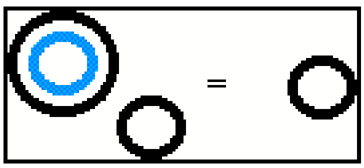
($\mathcal{P}$-ag. 1) Deux figures P et P' peuvent se déplacer dans la même zone du plan sans jamais se rencontrer, se croiser, ni traverser la ligne d'un rond

P **P'** = **P'** **P**

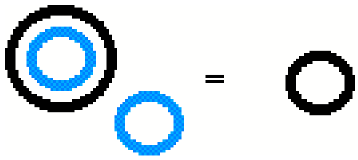
($\mathcal{P}$-ag. 2) Deux figures identiques **P** et **P** dans la même zone du plan se réduisent à un exemplaire unique de cette figure **P**

P **P** = **P**

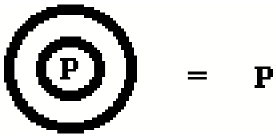
($\mathcal{P}$-ag. 3) Le rond noir absorbe le rond noir entourant un rond bleu..



($\mathcal{P}$-ag. 4) La coexistence dans une même zone du plan d'un rond noir entourant un rond bleu et d'un rond bleu donne un simple rond noir.



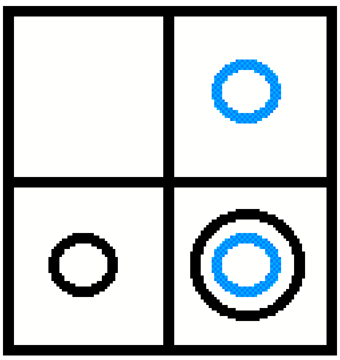
(𝒫-ag. 5) Deux ronds concentriques entourant P sont identiques à la figure P, c'est dire que deux ronds cocentriques autour d'une figure quelconque s'effacent.



Notre géométrie 𝒫 est définie

Il s'agit maintenant de démontrer que toutes les figures P de cette géométrie définies en (0. **𝒫-Figures**) se réduisent soit à un rond seul noir ou bleu, soit à un rond bleu entouré d'un rond noir, soit enfin s'effacent purement et simplement. Ceci donne lieu comme précédement à un théorème.

𝒫-Théorème principal : Il y a quatre objets dans 𝒫. autrement dit : Toute figure se réduit soit à la page blanche, soit à un rond bleu, soit à un rond noir, soit un rond bleu autour d'un rond noir.

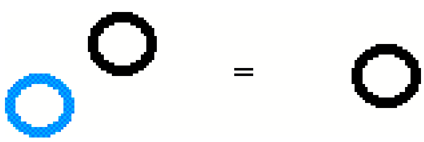


Premier lemme

Commençons par démontrer un premier lemme qui nous servira dans la démonstration de ce théoréme.

𝒫-Lemme (J.M.Cahen) : La figure constituée d'un rond bleu et d'un rond noir colatéraux, est réductible à un rond noir.

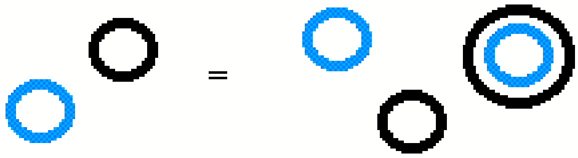
Soit l'égalité à démontrer.



Nous la démontrons en trois coups.

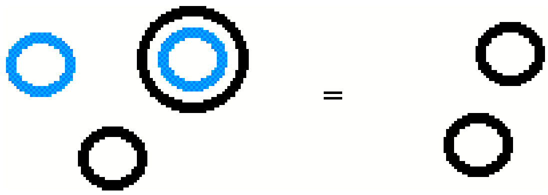
1 - D'aprés l'axiome géométrique 3, un rond noir vaut pour la figure qui conjoind un noir et un noir contenant un bleu.

Un rond noir et un rond bleu colatéraux valent ainsi pour un noir et un noir contenant un bleu et avec eux un rond bleu.



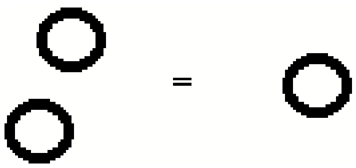
2 - D'aprés l'axiome 4, le rond bleu et le rond noir contenant un bleu vaut pour un rond noir.

Notre figure vaut donc pour deux ronds noirs côte à côte.



3 - D'aprés l'axiome 2, deux figures identiques valent pour une.

Ces deux ronds noirs sont équivalants à un ronds noirs



Notre 𝒫-Lemme est démontré.

Ainsi nous pouvons maintenant démontrer le théoréme principal.

Démonstration du 𝒫-Théorème principal

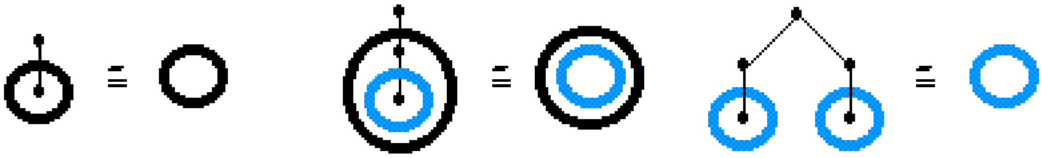
Nous le démontrerons par récurence comme dans la théorie précédente, grâce à la construction d'un arbre syntaxique pour chaque figure.

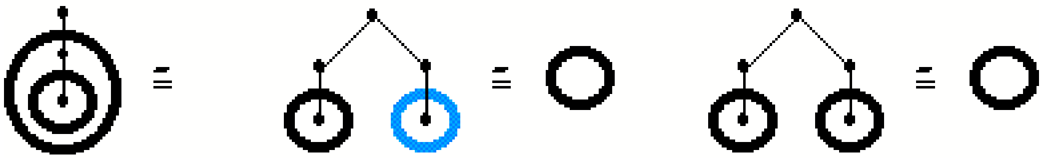
Dans ce cas il y a quatre cellules de base permettant de construire ces arbres.

(𝒫-fp. 0) **(𝒫-fp. 1)** **(𝒫-cf. 1)** **(𝒫-cf. 2)**

Fort de cette définition et de ce théoréme, nous pouvons envisager de donner la démonstration du théorème par récurence sur la hauteur des figures.

1.- premières figures de hauteurs 0, 1 et 2,





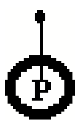
Produites par leur graphe selon le caractère primitif et les clauses formatives, elles sont bien réductibles dans tous les cas au vide ou au rond simple d'aprés les axiomes (**$\mathcal{P}$-ag.2**), (**$\mathcal{P}$-ag.5**) et le $\mathcal{P}$-lemme.

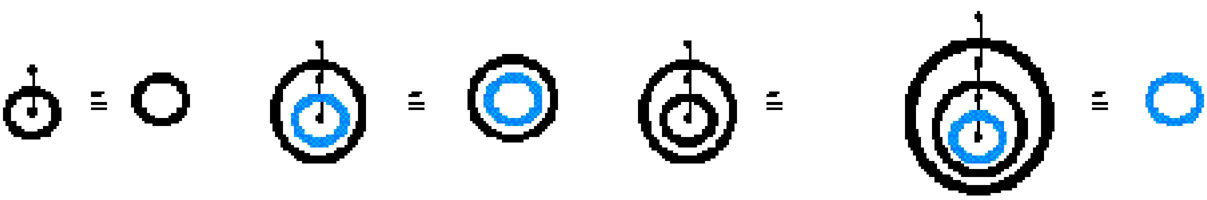
Le théoréme est démontré pour les hauteurs 0,1 et 2.

2.- Considérons maintenat que le théorémes est vrai pour les figures jusqu'à la hauteur n-1. Alors à la hauteur n.

Deux cas peuvent se présenter.

2;1.- La figure P' de hauteur n vient par la première clause formative d'une figure P de hauteur n-1,

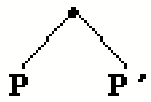




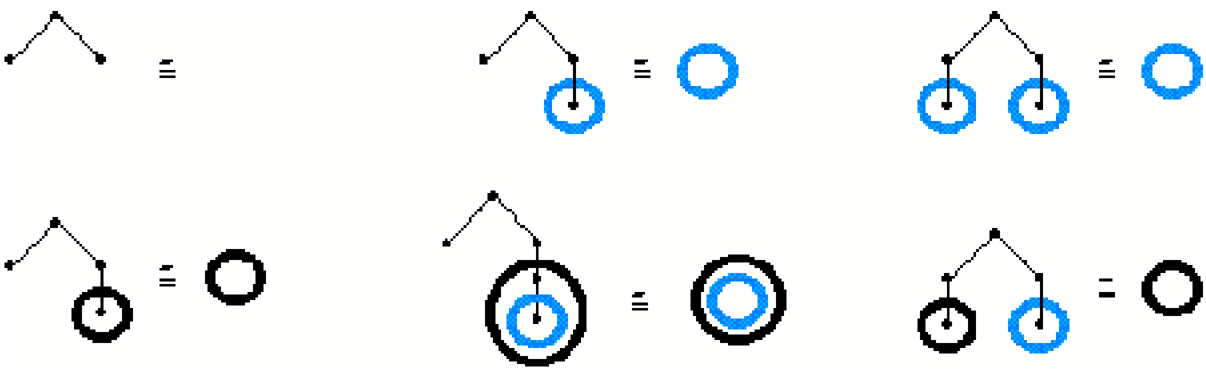
P = bleu   P = o bleu   P = o noir   P = o noir et bleu

Cette figure P peut être d'aprés l'hypothèse de recurence, soit un vide auquel cas P' est un rond, soit un rond bleu auquel cas P′ est un rond noir entourant un rond bleu, ceci par identité de ces deux cas non réductibles par un axiome. Puis P peut être soit un rond noir auquel cas P′ est un vide, soit un rond noir entourant un rond bleu auquel cas P′ est un rond bleu d'aprés l'axiome **(𝒫-ag.5)**.

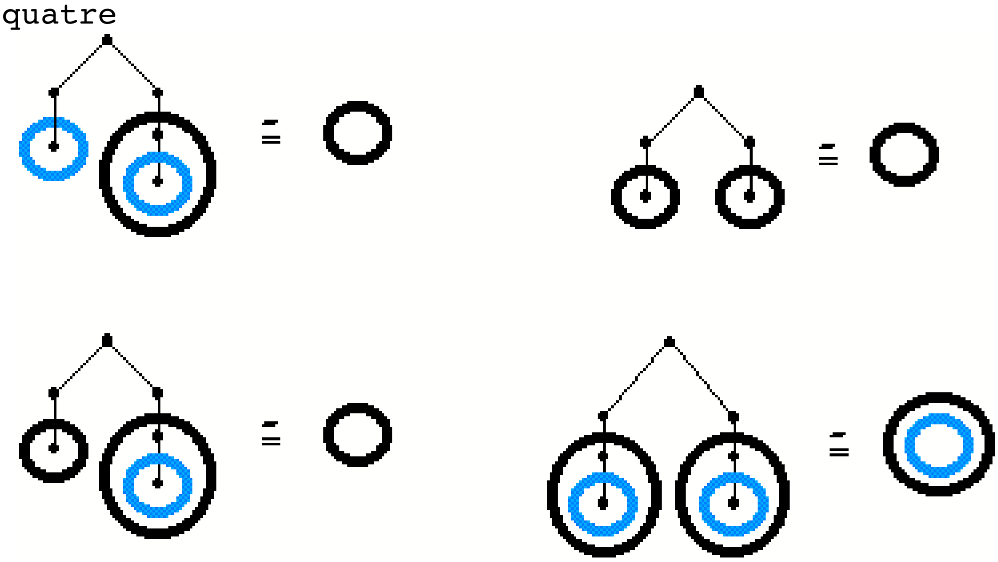
2.2.- La figure P″ de hauteur n vient par la seconde clause formative de deux figures P et P′ dont les hauteurs respectives sont inférieur ou égale à n-1



ces figures P et P′ peuvent être d'aprés l'hypothése de récurence, soit un vide, soit un rond bleu, soit un rond noir, enfin un rond noir autour d'un rond bleu. cela fait seize cas qui grâce à l'axiome de déplacement dans le plan **(𝒫-ag.1)** assurant la commutativité des figures alignées se réduisent à dix, soit six



plus quatre



auquels cas la figure P″ est réductible, d'aprés les axiomes **(𝒫-ag. 2)** à **(𝒫-ag. 5)** et moyennant notre **𝒫-Lemme** dans certains cas, à soit un vide, soit un rond bleu, soit un rond noir, enfin un rond noir autour d'un rond bleu (nous laissons au lecteur le soin d'associer l'identité ou un de ces axiomes à chaque cas)

Notre $\mathcal{P}$-théoréme est démontré

Deuxième géométrie augmentée ou la géométrie modifiée $\mathcal{S}$

Définir une géométrie c'est d'abord définir la multiplicité des figures élémentaires S de cette géométrie.

D'autre part nous formulons les axiomes qui définissent les dérivations par déformations acceptées dans cette géométrie.

0. **Figures**

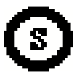
La multiplicité des figures présentent toutes les configurations de ronds définies à partir d'une figure primitive et de deux clauses formatives.

0.1. **La figure primitive**

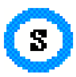
($\mathcal{S}$-fp. 0) L'espace vide d'une portion de plan dénué du moindre trait est une figure **S** de cette géométrie.

0.2. **Les clauses formatifs**

($\mathcal{S}$-cf. 1) Si **S** est une figure de cette géométrie alors **S** entourée d'un rond noir est une figure **S'** de cette géométrie.



($\mathcal{S}$-cf. 2) Si **S** est une figure de cette géométrie alors **S** entourée d'un rond bleu est une figure **S'** de cette géométrie.



($\mathcal{S}$-cf. 3) Si **S** et **S'** sont deux figures de cette géométrie alors l'une disposées à côté de l'autre est une figure **S"** de cette géométrie.

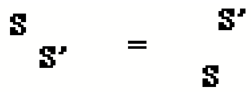
S S'

1. **Calculs** (axiomes)

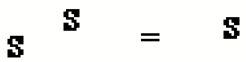
En second lieu nous disposons de trois axiomes géométriques pour cette géométrie des plus simples.

1.1. **Les axiomes géométriques**

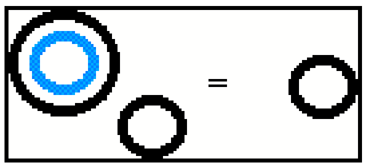
($\mathcal{S}$-ag. 1) Deux figures **S** et **S**' peuvent se déplacer dans la même zone du plan sans jamais se rencontrer, se croiser, ni traverser la ligne d'un rond



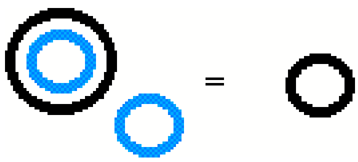
($\mathcal{S}$-ag. 2) Deux figures identiques S et S dans la même zone du plan se réduisent à un exemplaire unique de cette figure S



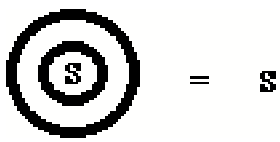
($\mathcal{S}$-ag. 3) Le rond noir absorbe le rond noir entourant un rond bleu..



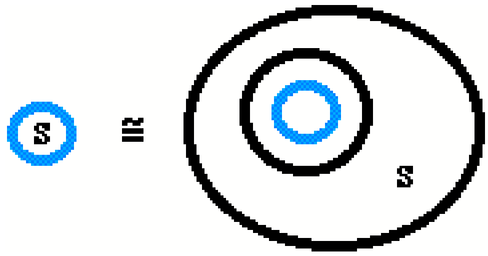
($\mathcal{S}$-ag. 4) La coexistence dans une même zone du plan d'un rond noir entourant un rond bleu et d'un rond bleu donne un simple rond noir.



($\mathcal{S}$-ag. 5) Deux ronds concentriques entourant **S** sont identiques à la figure **S**, c'est dire que deux ronds cocentriques autour d'une figure quelconque s'effacent.



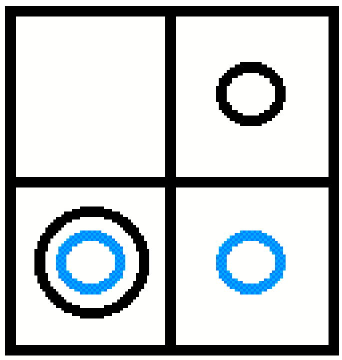
($\mathcal{S}$-ag. 6) La figure **S** entouré d'un rond bleu est identique à la même figure **S** coexistant avec un rond noir entourant un rond bleu dans la même zone du plan entourée d'un rond noir.



Notre géométrie $\mathcal{S}$ est définie

Il s'agit alors de démontrer comme dans la géométrie précédente que toutes les figures S de cette géométrie définies en (0.) se réduisent soit à un rond seul noir ou bleu, soit à un rond bleu entouré d'un rond noir, soit enfin s'effacent purement et simplement. Ceci donne lieu à un théorème.

$\mathcal{S}$-Théorème principal : Il y a quatre objets dans $\mathcal{S}$. autrement dit : Toute figure se réduit soit à la page blanche, soit à un rond noir, soit à un rond bleu, soit un rond bleu autouré d'un rond noir.



Ceci est facile à démontrer grâce à l'axiome **($\mathcal{S}$-ag. 6)** de cette théorie qui établi la réduction possible de cette géométrie à la précédente où alors le même théoréme est démontré comme **$\mathcal{P}$-Théorème principal.**

Il faut et il suffit de faire usage du Lemme suivant,

$\mathcal{S}$-Lemme Une figure quelconque de cette géométrie modifiée $\mathcal{S}$ est réductible à une figure de la géométrie géométrie augmentée $\mathcal{P}$.

Démonstration. Ce Lemme est une conséquence de l'axiome **($\mathcal{S}$-ag.6).**

Et puis pour finir.

Un exercice pour le lecteur attentif17

Dans ces conditions, le lecteur peut, à titre d'exercice, vérifier que les quatres seules figures véritablement originales (voir figures ci-dessous) de cette géométrie modifiée $\mathcal{S}$ si nous suivons son théorème principal, - soit les quatre figures réduites de $\mathcal{P}$. entourées d'un ronds bleu -, sont réductibles à celle de $\mathcal{P}$ et réductibles dans $\mathcal{P}$ ou dans $\mathcal{S}$ qui pocèdent les mêmes axiomes géométriques de **(ag.1)** à **(ag.5)**.

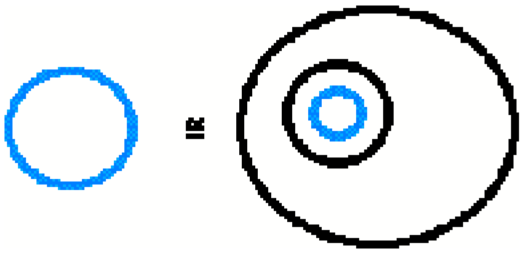


Fig 1. c'est l'**(ag.5)**,

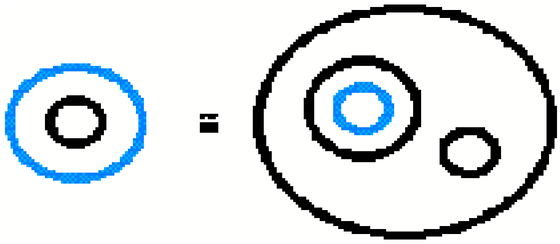


Fig 2. s'efface par les **(ag.3)** et l'**(ag.5)**.

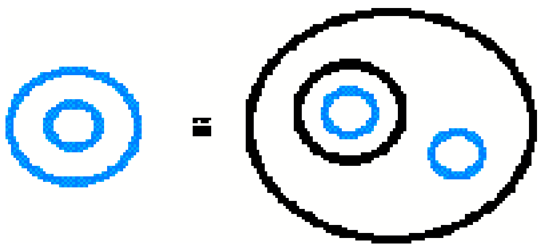


Fig 3. s'efface par les **(ag.4)** et l'**(ag.5)**.

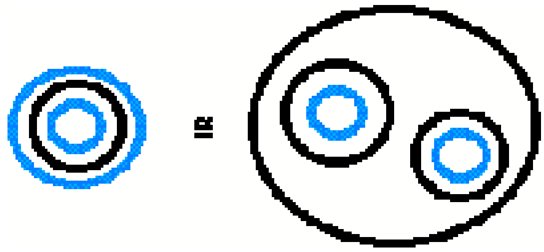


Fig 4. donne le rond bleu par les **(ag.2)** et **(ag.5)** .

Ce petit exposé *Trois petites géométries de ronds* est destiné à trouver sa place dans l'essai intitulé *Faire des ronds De la topologie du sujet*. qui expose la fonction, les définitions nécessaires et les grandes lignes de la Topologie du sujet dans le discours analytique.

Il doit se prolonger dans un autre intitulé *Trois petits systhémes d'écriture des ronds*.

Bs. As. le 23 novembre 2004
J.M. Vappereau18