

INFINITO POTENCIAL E INFINITO ACTUAL

Para abordar este tema, es necesario disponer de la noción de biyección entre conjuntos y de cardinal. A su vez, es necesaria una distinción entre lo que es un conjunto finito y un conjunto infinito.

Habría que hacer una distinción más. En teoría ingenua de conjuntos es posible hablar de conjuntos y de clases como sinónimos. En teoría axiomática de conjuntos (que no veremos aquí) no toda clase es un conjunto. En este caso no tomaré en cuenta esta distinción.

Una biyección entre dos conjuntos, es una correspondencia tal que a cada elemento del primer conjunto, le corresponde uno y sólo un elemento del segundo.

CONJUNTOS FINITOS

Si tomamos dos conjuntos A y B, el primero de los cuales tiene como elementos las butacas de la platea de un teatro, y el conjunto B es el conjunto de asistentes a una representación. Diremos que hay una biyección entre ambos conjuntos, cuando la sala esté llena, es decir, todas las butacas ocupadas, cada una con un solo espectador (en ninguna hay un niño "aupa")

Cuando entre dos conjuntos hay una biyección, se dice que ambos conjuntos están coordinados. Y para que ello ocurra, si ambos conjuntos son finitos (tienen un número finito de elementos), ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Al número de elementos lo vamos a llamar el cardinal de conjunto. Supongamos una sala con 50 asientos, entonces el cardinal de A y de B será 50; 50 butacas, 50 espectadores.

En este caso, también se puede llegar a decir que 50 es la clase de aquellos conjuntos coordinables entre sí, es decir todos aquellos que tengan 50 elementos. En el ejemplo que estoy poniendo, otro conjunto coordinable sería el de los tickets correspondientes a cada una de las butacas y que se le entrega a cada espectador. Y así podríamos inventar nuevos conjuntos coordinables entre sí.

Por supuesto, podríamos armar con cada número una clase de conjuntos coordinables entre sí y que tengan ese cardinal. Así, 7 es la clase que contiene a los días de la semana, a la clase cuyos elementos son las notas musicales, la clase de los siete primeros dígitos $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, cualquier clase que contenga 7 letras, o 7 números, no importa cuales con tal que sean 7.

En el caso de conjuntos finitos, NUNCA serán coordinables el conjunto y una cualquiera de sus partes (de sus subconjuntos). Está claro que si los conjuntos son finitos, podemos decir que los subconjuntos (en sentido estricto) tienen un cardinal menor que el

conjunto del cual son subconjuntos . Por lo tanto NUNCA se puede establecer una biyección entre ambos .

Sea $A = \{a, b, c\}$.El cardinal de A es 3 (hay 3 elementos)

Entre los subconjuntos de A tenemos entre otros :

$\{a\}$ con cardinal 1

$\{b, c\}$ con cardinal 2

No se puede establecer correspondencia biyectiva entre A y ninguno de ellos (no tienen el mismo cardinal)

CONJUNTOS INFINITOS

El conjunto de los números naturales, es el mas conocido de los conjuntos infinitos . A partir de Peano, se define por inducción , es decir , a partir de un primer elemento llamado 1 , los que siguen se obtienen por un operador llamado sucesor . El sucesor es la función (+1) tal que al elemento n , le asigna

$$s(n) = n+1$$

Por lo tanto , partiendo de 1 , se tiene

1

$$s(1) = 1+1= 2$$

$$s(2) = 2+1= 3$$

Y así siguiendo. Este conjunto de números naturales , \mathbb{N} , se puede ubicar en una recta ocupando los extremos de segmentos consecutivos de longitud 1 , no habiendo ningún número natural entre dos naturales consecutivos (quedan huecos que no son ocupados por naturales)

1 2 3 4 5 6.....

Un **subconjunto** de los naturales es el conjunto de los números pares , que son aquellos números múltiplos de 2. Se ve entonces que a diferencia de lo que ocurre con los conjuntos finitos, aquí si es posible coordinar un conjunto (\mathbb{N}) con una de sus partes , el conjunto de los pares .Eso ocurre porque contamos con una biyección , que a cada natural n le asigna el natural par , $2n$.

$$n \longrightarrow 2n$$

Existe otra biyección que coordina el conjunto de naturales con su subconjunto de los impares , a través de la asignación

$$n \longrightarrow 2n+1$$

Se puede demostrar tal como Cantor lo hizo , que el conjunto de Naturales \mathbb{N} ,es coordinable no sólo con el conjunto de Pares y el conjunto de Impares , sino también con el conjunto de enteros, \mathbb{Z} , con el conjunto

de racionales \mathbb{Q} . Por lo tanto, al cardinal de todos esos conjuntos lo llamó \aleph_0 .

\aleph_0 es la clase de todos aquellos conjuntos para los cuales es posible hallar una biyección con el conjunto \mathbb{N} .

Cantor demostró que el conjunto de números reales \mathbb{R} , no es coordinable con \mathbb{N} y por lo tanto no le corresponde ese mismo cardinal aleph cero. De allí, Cantor propuso la existencia de diversos alephs, es decir, que hay infinitos “mas grandes” que otros. Y le dio al infinito la posibilidad de realizar operaciones algebraicas.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, ahora podemos abordar con un ejemplo, la diferencia entre el **infinito potencial y el actual**. Cabe señalar que esta terminología proviene de Aristóteles. Cantor habla de infinito propio e impropio.

Propongo tomar el conjunto formado por todos los elementos de una determinada sucesión, considerar y el intervalo de la recta \mathbb{R} , en la que podemos ubicar dichos elementos.

Consideremos la sucesión $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Esta sucesión es la correspondencia que a cada natural, le asigna el número real, $\frac{1}{n}$. Por lo tanto, si **escribimos los términos de la sucesión** diríamos que ellos son

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Observamos en la sucesión que hay INFINITOS elementos. Todos tienen en el numerador un 1, y en el denominador un número natural cada vez mas elevado. Si quisiéramos “RECORRER” la sucesión estaríamos en una “metonimia” en la cual, no accedemos nunca al último término (no existe). Esa metonimia es el **infinito potencial**. Es una cantidad inaccesible, algo así como el “horizonte”: en cuanto nos acercamos, ya se corrió.

Pero, ya dijimos que al poder poner en correspondencia esos elementos con los números naturales, el conjunto de elementos de esa sucesión es coordinable con \mathbb{N} y por lo tanto, su cardinal es \aleph_0 ; **ese es el infinito actual**. Es un infinito al que se le ha puesto un nombre, y por lo tanto hay lo que llamaría una operación metafórica

Nombrar \aleph_0 , interrumpe la metonimia.

Otra cosa interesante que se puede pensar es que, si ubicamos todos los términos de la sucesión, veremos que se van acercando a 0 sin tocarlo, y no exceden de 1.

El mayor valor es 1 y tiene límite 0 (sin tocarlo) entonces



Y entonces, el conjunto de todos los términos de la sucesión, conjunto cuyo cardinal es \aleph_0 , está incluido en el intervalo $(0,1]$ de número reales, intervalo cuyo cardinal no es \aleph_0 .

Hay mucho mas para desplegar , pero por el momento deajo acá -